

$$\sqrt{n^2+123}=k \quad (k \text{は正の整数}) \cdots \textcircled{1} \text{とおく。}$$

両辺を2乗すると

$$n^2+123=k^2$$

$$n^2-k^2=-123$$

$$(n+k)(n-k)=-123$$

考えられる組み合わせは

$$(n+k, n-k) = (-123, 1), (-41, 3), (-3, 41), (-1, 123), \\ (1, -123), (3, -41), (41, -3), (123, -1)$$

①より, $n \geq 1$, $k > 11$ であり, $n+k > 12$ であるから

$$(n+k, n-k) = (41, -3), (123, -1)$$

$$\begin{cases} n+k=41 \\ n-k=-3 \end{cases}, \begin{cases} n+k=123 \\ n-k=-1 \end{cases}$$

$$\therefore n=19, \quad n=61$$